5 Bázy, Skalárny súčin

Opakovanie: Lineárna závislosť vektorov

1. Máme danú lineárne závislú množinu vektorov $x_1, \cdots x_n$. Overte, či platí nasledujúce tvrdenie:

   Pre každé $i \in \{1, \cdots n\}$ vieme vektor x_i zapísať ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov.

   (tvrdenie buď dokážte, alebo nájdite protipríklad)

Bázy

1. Zistite, či dané vektory tvoria bázu v $\mathbb{R}^3$
   (a) $(1, 2, 3), (1, -2, 3), (1, 2, -3)$
   (b) $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)$
   (c) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$
2. Ukážte, že množina vektorov V tvorí bázu v $\mathbb{R}^3$. Nájdite súradnice vektorov x, y v tejto báze.
   (a) $V = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ $x = (1, 2, 3)$ $y = (4, 5, 6)$
   (b) $V = \{(1, 2, 3), (1, -1, 1), (2, 1, 0)\}$ $x = (1, 1, 1)$, $y = (0, 1, -2)$
   (c) $V = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ $x = (1, 2, 3)$, $y = (0, 0, 0)$
3. Ukážte, že množina vektorov V tvorí bázu v priestore všetkých polynómov stupňa nanajvýš 2. Nájdite súradnice vektorov f, g v tejto báze.
   (a) $V = \{1 - x, 1 + x, x^2\}$ $f = 3x^2 - x$, $g = 7$
   (b) $V = \{-3, (x - 3), (x - 3)^2\}$ $f = x^2$, $g = 2x$
4. Určte dimenziu priestoru $[x, y, z]$, ak $x = (1, 3, 2, 1)$, $y = (4, 9, 5, 4)$ $z = (3, 7, 4, 3)$ (ako podpriestoru $\mathbb{R}^4$)
5. Nech P_n = priestor polynómov stupňa nanajvýš n. Nájdite jeho dimenziu a bázu.
   Overte, že $1, x - 1, (x - 1)^2, \cdots, (x - 1)^n$ tiež tvorí bázu P_n
6. Doplňte dané vektory na bázu vektorového priestoru V
   (a) $(1, 1, 2), (2, 1, 3)$ $V = \mathbb{R}^3$
   (b) $x^2 - 1$, $x^2 + 1$, V = priestor polynómov stupňa najviac 3.

Skalárny súčin

1. Overte, či daný predpis určuje skalárny súčin na $\mathbb{R}^3$.
   Nech $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.
   (a) $\langle x, y\rangle = x_1, x_2 - x_1y_2 + 3x_2y_2$
   (b) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1$
   (c) $\langle x, y\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$
2. Overte, či daný predpis určuje skalárny súčin na priestore všetkých polynómov stupňa najviac 2
   (a) $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + f(1)g(1)$
   (b) $\langle f, g\rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$