2 Vektorové priestory

Opakovanie: matice

1. Nájdite všetky riešenia systému lineárnych rovníc

(a)

$$\begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ -2x + y &= -8 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ -x + y + z &= 1 \\ x - y + 3z &= 11 \end{aligned}$$

Definícia VP

1. Overte, že V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ (s operáciami $\oplus\colon V \times V \to V$ a $\odot\colon \mathbb{R} \times V \to V$), ak:
   - V je množina všetkých nekonečných postupností reálnych čísel $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, x_3, \cdots)$,
   - $(x_n)_{n=1}^{\infty} \oplus (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$, (pre všetky $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in V$)
   - $c \odot (x_n)_{n=1}^{\infty} = (cx_n)_{n=1}^{\infty}$ (pre všetky $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in V$, $c \in \mathbb{R}$)
2. Overte, že V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ (s operáciami $\oplus\colon V \times V \to V$ a $\odot\colon \mathbb{R} \times V \to V$), ak:
   - $V = \{\Delta\}$ je jednoprvková množina,
   - $\Delta \oplus \Delta = \Delta$,
   - $c \odot \Delta = \Delta$ (pre všetky $c \in \mathbb{R}$)
3. Overte, že V <u>nie je</u> vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ (s operáciami $\oplus\colon V \times V \to V$ a $\odot\colon \mathbb{R} \times V \to V$), ak:
   - $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (množina usporiadaných dvojíc (x, y))
   - $(x, y) \oplus (z, w) = (x + z, y + w)$, (pre všetky $(x, y), (z, w) \in V$)
   - $c \odot (x, y) = (cx, 2cy)$ (pre všetky $(x, y) \in V$, $c \in \mathbb{R}$)
4. Overte, že V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ (s operáciami $\oplus\colon V \times V \to V$ a $\odot\colon \mathbb{R} \times V \to V$), ak:
   - $V = \mathbb{R}[x]$ je množina všetkých polynómov v x s koeficientami v $\mathbb{R}$. Označíme si
   $$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_nx^n \\ g &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots b_mx^m \end{aligned}$$
   - Ak $n \geq m$, polynóm g doplníme o členy s nulovým koeficientom do mocniny n
   $$g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots b_mx^m + 0x^{m+1} + 0x^{m+2} \cdots + 0x^n$$
   a definujeme $f \oplus g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$, (pre všetky $f, g \in V$)
   (ak $m \geq n$ doplníme polynóm f do mocniny m a operáciu $\oplus$ definujeme analogicky)
   - $c \odot f = (ca_0) + (ca_1)x + (ca_2)x^2 + \cdots (ca_n)x^n$ (pre všetky $f \in V$, $c \in \mathbb{R}$)
5. Overte, že V je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$ (s operáciami $\oplus\colon V \times V \to V$ a $\odot\colon \mathbb{R} \times V \to V$), ak:
   - $V = \mathbb{R}^+$ (množina všetkých kladných reálnych čísel)
   - $x \oplus y = xy$, (pre všetky $x, y \in V$)
   - $c \odot x = x^c$ (pre všetky $x \in V$, $c \in \mathbb{R}$)
6. Overte, že $\mathbb{R}$ je vektorový priestor nad $\mathbb{R}$.